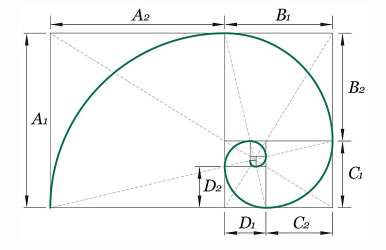
第 1 讲 旋转与轨迹





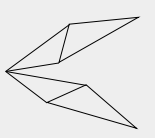
**如果在手指头上系一根绳子，绳子另一头挂一个重物，旋转这根绳子，将绳子缠在手指上． 这个过程中，重物的运动轨迹如图所示：这就是数学中的螺旋线。螺旋线吸引了大批有名望的数学家，其中包括笛卡尔、费马、帕斯卡、牛顿、莱布尼茨、洛必达、伯努利、欧拉、拉格朗日等等我能一下子就叫上来的名字。**

**他们显然很喜欢创造一些关于螺旋线线的竞赛和问题，之后再以相互攻击和辱骂结束。**



**1.1 认识图形旋转与轨迹**

**自学探究**

旋转：把一个图形绕着某一点O 转动一个角度的图形变换叫做旋转，点O 叫做旋转中心，转动的角叫做旋转角，如果图形上的点 P 经过旋转变为点 P ' ，那么这两个点叫做这个旋转的的对应点．(如下图)

注意：⑴研究旋转问题应把握两个元素：旋转中心与旋转角．

⑵每一组对应点所构成的旋转角相等．

旋转的性质：

①旋转后的图形与原图形是全等的；(进而得到相等的线段、相等的角)

②旋转前后两个图形对应点到旋转中心的距离相等；(进而得到等腰三角形)

③对应点与旋转中心所连线段的夹角都等于旋转角；(若特殊角则得到等边三角形、等腰直角三角形)

由旋转的性质可知，旋转作图必须具备两个重要条件：

⑴旋转中心；⑵旋转方向及旋转角度．具体步骤分以下几步：

连：即连接图形中每一个关键点与旋转中心．

转：即把连线按要求绕旋转中心转过一定角度(作旋转角)

截：即在角的另一边上截取关键点到旋转中心的距离，得到各点的对应点．

连：即连接所得到的各点．

学以致用



1、如下图1，△*AOB* 旋转到△*A*′*OB*′的位置．若∠*AOA*′=90°，则旋转中心是点 。旋转角是 ．点*A* 的对应点是 ．线段*AB* 的对应线段是 。∠*B* 的对应角是 ．∠*BOB*′= ．

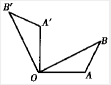
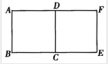


图1

图2

2、如上图2，若正方形 DCEF 旋转后能与正方形 ABCD 重合，则图形所在平面内可作为旋转中心的点共有（ )个．

3、将下左图按顺时针方向旋转90度后得到的是( )。



E

D

B

C

A

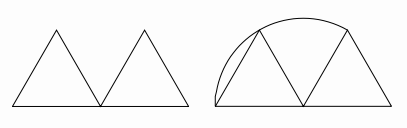


**1.2 进阶运用**

例题1：

（1）线段 *AB* 长 10 厘米，绕 *A* 点顺时针旋转 120 度，B 点的轨迹长度是多少？

（2）如图，将边长为 2 的正三角形Ⅰ放在一条直线上，让三角形绕顶点*C* 顺时针转动到达Ⅱ，则 *A* 点走过的路程的长 ．



Ⅱ

Ⅰ

A

A

Ⅰ

Ⅱ

C

B

C

B

例题2 ：如图，一条直线上放着一个长和宽分别为 4cm 和 3cm 的长方形Ⅰ．它的对角线长恰好是5cm ．让这个长方形绕顶点 B 顺时针旋转90°后到达长方形Ⅱ的位置．（π取3.14 ）

1. 点 A 走过的路程的长是 厘米。
2. 点C 走过的路程的长是 厘米。

（3）点 D 走过的路程的长是 厘米。



A

A

B

C

D

Ⅰ

Ⅱ

Ⅰ

D'

A'



Ⅱ

Ⅱ

Ⅰ

D

D

D

C

C

C

Ⅰ

Ⅱ

Ⅰ

C '

B

B

B

A

A

A

A

A

A

例题3

（1）线段 AB 长 10 厘米，绕 A 点顺时针旋转 90 度，所形成的图形面积是多少？

（2）如图， ABCD 是一个长为4 ，宽为3 ，对角线长为5 的正方形，它绕C 点按顺时针方向旋转90 ，分别求出 BC、DC 两边扫过图形的面积．

B

A

B´

D

A

B

C

D

A

C

B

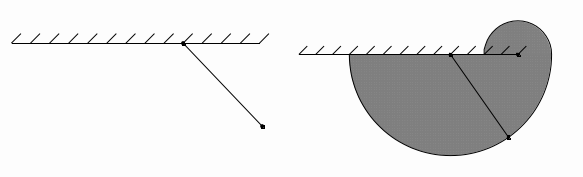
D´

D

C

**例题4**

**（1）如图，一只狗被拴在一面墙上的 O 点，狗在C点，拴绳长** 6 **米，OB 之间的距离是 4 米，那么狗能够到达地方的面积约为多少平方米？（π取**3.14 **）**



C

A

B

O

C

O

B

A

**（2）如图，一只羊被拴在一个长为 4 米，宽为 3 米的长方形的羊圈内，在 B 处有一个缺口，羊可以自由出入，拴绳长 9 米，那么羊能够到达的地方的面积约为多少平方米？（π取**3.14 **，结果保留两位小数）**

****

B

B

C

A

D

D

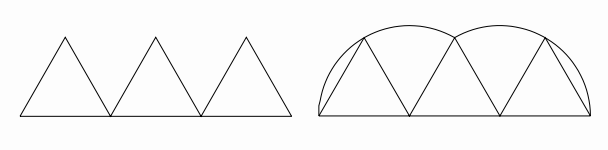
C

A



**巩固练习**

**1：如图，将边长为** 1 **的正三角形**Ⅰ**放在一条直线上，让三角形绕顶点***C* **顺时针转动到达**Ⅱ**，再继续这样转动到达**Ⅲ**，则** *A* **点走过的路程的长 ．**



B

B

A

C

A

C

Ⅰ

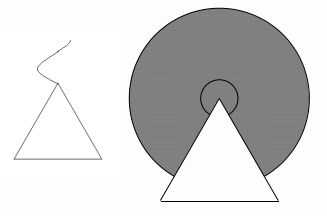
Ⅱ

Ⅲ

Ⅰ

Ⅱ

Ⅲ

2： **一只狗被拴在底座为边长 4 米的等边三角形建筑物的墙角上(如图)，绳长是 3 米 ,则狗所能到的地方的总面积是 平方米（π取**3.14 **）．**

**3: 如图，一条直线上放着一个长和宽分别为 4cm 和 3cm 的长方形Ⅰ．它的对角线长恰好是 5cm ．让这个长方形绕顶点 B 顺时针旋转90°后到达长方形Ⅱ的位置，这样连续做三次，点 A 到达点 E 的位置．求点A 走过的路程的长．（π取3.14 ）**

Ⅲ

Ⅳ

Ⅱ

Ⅰ

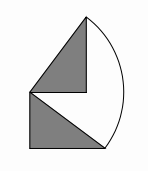
A

B

C

E

D

4、**如右图，以 OA 为斜边的直角三角形的面积是 24 平方厘米，斜边长 10 厘米，将它以 O 点为中心旋转**90 **，问：三角形扫过的面积是多少（包含三角形）？(π取 3)**

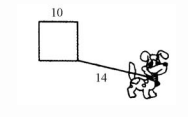
A

O

A'

**创学挑战**

**真题演练1: 如图，一只狗用皮带系在 10×10 的正方形狗窝的一角上，皮带长为 14，在狗窝外面狗能活动的范围的面积是多少？画出图形并计算．（狗的大小忽略不计，π=3，长度单位：分米）**



**总结反思**

